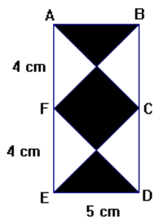
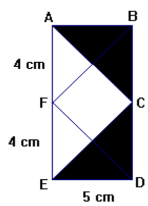
Solución del problema 1. La respuesta es **a)**. Si elegimos el número de monedas de 5 y 2 pesos (sin pasarnos de 10 pesos), el número de monedas de 1 peso queda determinado, por lo que únicamente veremos cuántas monedas de 5 y 2 pesos tomamos inicialmente. Si usamos 2 monedas de 5 pesos, ya acabamos, si usamos 1 de 5 pesos podemos usar 0, 1 ó 2 de 2 pesos y si no usamos monedas de 5 pesos, podemos usar 0, 1, 2, 3, 4 ó 5 monedas de 2 pesos. Por lo tanto, hay 10 maneras de hacerlo.

Solución del problema 2. La respuesta es **c)**. De la primera relación tenemos que $n = 4 \cdot 9 + 1 = 37$, de la segunda $37 = n = a \cdot 5 + 2$ y despejando a tenemos que $a = \frac{37-2}{5} = 7$.

Solución del problema 3. La respuesta es **c)**. Observamos que si en la figura:



acomodamos los triángulos blancos de la manera siguiente:



Obtenemos el triángulo ACE de base 8 cm y altura 5 cm. Por lo tanto el área sombreada es el área del rectángulo ABDE menos el área del triángulo ACE.

Área del rectángulo es $b * h$ = 5 cm * 8 cm = 40 cm^2.

Área del triángulo ACE = $\dfrac{b*h}{2}$ = $\dfrac{8\,cm * 5\,cm}{2}$ = 20 cm^2.

Por lo tanto el área sombreada es:

40 cm^2 – 20 cm^2 = 20 cm^2. La respuesta es c)

Solución del problema 4. La respuesta es **b)**. Al sumar 20 números mayores que 20 el resultado es mayor que 400, por lo que los 20 números no pueden ser mayores que 20. Probemos que es posible tener 19 mayores que 20, para esto, elegimos 19 números iguales a 21 y el último igual a -199, así la suma total es: 19(21)+(-199)=399-199=200.Por lo que estos números cumplen y el número buscado es 19.

Solución del problema 5. La respuesta es **b)**. Asignemos a cada asterisco una letra (*A*, *B* y *C*) para su más fácil manejo. Notemos que *A*, *B* y *C* solamente pueden tomar uno de los siguientes valores: 0, 1, 2, 3, … 8 ó 9. $\begin{array}{rrr} & A & B \\ \times & & 7 \\ \hline 4 & C & 9 \end{array}$.

La cifra de las unidades de $B \times 7$ debe terminar en 9, la única una cifra *B* que cumple con esto es el mismo 7, por lo cual *B* = 7: $\begin{array}{rrr} & A & 7 \\ \times & & 7 \\ \hline 4 & C & 9 \end{array}$

Para calcular *A* y *C* observemos que $40 \leq 7 \times A + 4 < 50$, el cuatro lo ponemos ya que “llevamos 4” de la operación 7×7, el único número entero *A* que cumple con esa relación es *A* = 6, por lo cual *C* = 6: $\begin{array}{rrr} & 6 & 7 \\ \times & & 7 \\ \hline 4 & 6 & 9 \end{array}$

Por lo cual, la respuesta es $A + B + C = 6 + 7 + 6 = 19$.

Solución del problema 6. La respuesta es **e)**. Entre el 1 y el 6000 hay 3000 pares. De entre éstos la tercera parte son múltiplos de 3, así que hay 3000-1000=2000 pares que no son múltiplos de 3.

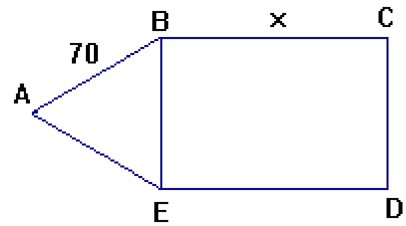
Solución del problema 7. La respuesta es **d)**. Nos fijamos en el último dígito de las potencias de 3. $3^0 = 1$, 3^1 termina en 3, 3^2 termina en 9, 3^3 termina en 7 y 3^4 termina en 1, es decir, se repite cada 4 números. Luego, tenemos que 3^{17} termina en 3. De la misma manera 7^0 termina en 1, 7^1 termina en 7, 7^2 termina en 9, 7^3 termina en 3 y 7^4 termina en 1, se vuelve a repetir la secuencia cada 4 potencias y tenemos que 7^{13} termina en 7. Por lo tanto $3^{17} + 7^{13}$ termina en 0.

Solución del problema 8. La respuesta es **b).** Es fácil ver que aparece un 1 en las posiciones 1, 1+2, 1+2+3, …, por lo que para contar el número de unos, necesitamos encontrar el mayor entero n tal que: $1 + 2 + \cdots + n \leq 100$. Usando que esta suma es $\frac{n(n+1)}{2}$ o intentando con varios valores de n, encontramos que dicha n es 13. Por lo que hay 13 unos en la sucesión, entonces hay 100-13=87 números 2. Por lo tanto, la suma buscada es 13(1)+87(2)=187.

Solución del problema 9. La respuesta es **e)**. El total de resultados posibles es $6^3 = 216$, contemos cuántos de estos casos cumplen la condición. Si el número que mostró el dado rojo es i, los otros dos dados deben tener un número entre el 1 y el $i-1$, un total de $(i-1)^2$ posibilidades, así, hay $0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55$.

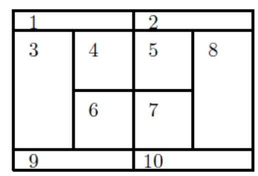
Solución del problema 10. La respuesta es **a)**. Haciendo el cálculo $32^{16} \cdot 125^{25} = (2^5)^{16} \cdot (5^3)^{25} = 2^{80} \cdot 5^{75} = 2^5 10^{75} = 3200 \ldots 0$. Este número termina en 75 ceros. Por lo tanto, el número tiene 77 dígitos.

Solución del problema 11. La respuesta es **a)**. Simplemente buscamos la fracción que tenga el mayor número posible en el numerador y el menor posible en el denominador. Como c y d son los números más grandes y a y b los más pequeños, se tiene que la fracción mayor es $\frac{c+d}{a+b}$.



Solución del problema 12. La respuesta es **d)**. En la figura observamos que el segmento BE mide 70 cm, ya que, el triángulo ABE es equilátero, y como la figura BCDE es un rectángulo el segmento CD mide 70 cm. Por otra parte tenemos que el perímetro de toda la figura es 456 cm. Es decir: AB + BC + CD + ED + AE = 456, entonces; 70 + x + 70 + x + 70 = 456, por lo que, 210 + 2x = 456. Como 456 – 210 = 246, entonces, 2x = 246, por lo tanto x = 123 cm. Entonces la respuesta es d).

Problema 13. La respuesta es **c)**. Denotemos por $ABCD$ cualquier número de 4 dígitos. Si $A=6$ tenemos 9 posibilidades para B, para C y para D (cualquier dígito salvo el 6), así que en total hay $9^3 = 729$ números. Si $B=6$, tenemos 8 posibilidades para A (cualquier dígito salvo 6 ó 0). 9 para C y 9 para D, por lo que hay $8 \cdot 9^2 = 648$ números. Análogamente, si $C=6$ ó $D=6$ tenemos 648 números. Si ningún dígito es igual a 6, tenemos 8 opciones para A, y 9 para$B$, C y D, por lo que hay $8 \cdot 9^3 = 5832$. Entonces, el total es 729+3(648)+5832=8505 números.



Problema 14. La respuesta es **e)**. Para cada uno de los 10 rectángulos pequeños sea n_i el número de rectángulos que contienen al rectángulo i como esquina superior izquierda además de él mismo.

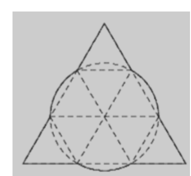
Entonces $n_1 = 6 \quad n_2 = 3 \quad n_3 = 6 \quad n_4 = 5 \quad n_5 = 4$

$n_6 = 2 \quad n_7 = 1 \quad n_8 = 1 \quad n_9 = 2 \quad n_{10} = 1$

Así el total de rectángulos es 31.

Solución del problema 15. La respuesta es **c)**. Primero contamos cuántas veces aparece el 2 entre los números del 1 al 100. Aparece 10 veces en las unidades (en el 2, 12, 22, etc.) y 10 veces más en las decenas (en los números del 20 al 29), así que aparece 20 veces. De la misma manera los números 4, 6 y 8 aparecen 20 veces, por lo que la suma buscada es igual a (2+4+6+8)(20)=20^2=400.

Problema 16. La respuesta es **b)**. Las ocho caras de las cuatro monedas tienen la misma probabilidad de salir. Y como entre ellas hay 5 águilas, las probabilidad es 5/8.

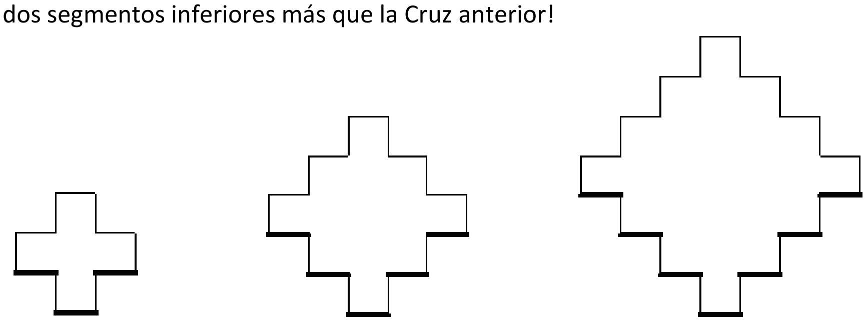


Solución del problema 17. La respuesta es **b)**. Partamos el triángulo en triángulos equiláteros de lado 1 como lo indica la figura. Entonces todos los ángulos miden 60 grados, así que la solución es b).

Solución del problema 18. La solución es **d)**. En efecto, como el radio es 6, la distancia de Q a P es 18. La altura en R es el lado vertical del rectángulo, el cual mide 12, entonces el área es $\frac{12\text{x}18}{2} = 108$.

Solución del problema 19. La solución es **c)**. La suma de los perímetros de todos los cuadrados es igual a 4 veces la suma de todos los segmentos que están sobre AB, es decir, 4x24=96.

Solución del problema 20. La solución es (c) Notemos que la cantidad de segmentos inferiores de Cruz 1 es tres, de Cruz 2 es cinco y de la Cruz 3 siete. ¡Cada Cruz tiene dos segmentos inferiores más que la Cruz anterior!



3 segmentos 5 segmentos 7 segmentos

Así pues, se puede deducir que la *cruz N* tiene *2N+1* segmentos inferiores, además, la cantidad de segmentos inferiores es la misma que la cantidad de segmentos superiores, y que de segmentos izquierdos y, también, de segmentos derechos, por lo cual la *cruz N* tiene 4(*2N+1*) segmentos. En nuestro caso, $4(2 \cdot 2010 + 1) = 16084$.