



XXIV Olimpiada Estatal de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas
“Francisco García Salinas”
Unidad Académica de Matemáticas



Soluciones Examen Estatal
4 de Junio de 2010

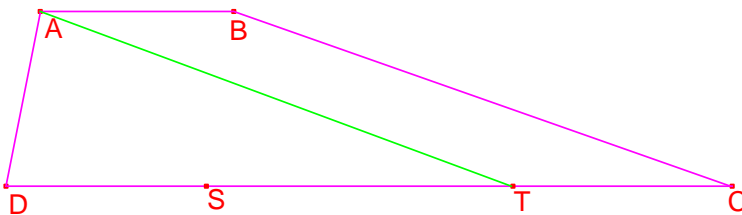
Problema 1. Sean a, b y c números tales que $0 < a, b, c \leq 1$. Prueba que $\frac{1}{2+3a} + \frac{2}{2+3b} + \frac{3}{2+3c} \geq \frac{6}{5}$. Por hipótesis $a \leq 1 \rightarrow 3a \leq 3 \rightarrow 2 + 3a \leq 2 + 3 = 5$ y por lo tanto $2 + 3a \leq 5 \rightarrow \frac{1}{2+3a} \geq \frac{1}{5}$,

Y como para b y c ocurre lo mismo entonces se tiene que $\frac{1}{2+3b} \geq \frac{1}{5}$ y $\frac{1}{2+3c} \geq \frac{1}{5}$

De modo que $\frac{1}{2+3a} \geq \frac{1}{5}$, $\frac{2}{2+3b} \geq \frac{2}{5}$ y $\frac{3}{2+3c} \geq \frac{3}{5}$ y sumando miembro a miembro se tiene que

$$\frac{1}{2+3a} + \frac{2}{2+3b} + \frac{3}{2+3c} \geq \frac{6}{5}$$

Problema 2. En el trapecio $ABCD$ AB es paralela a DC y $AD \neq BC$, los puntos S y T han sido trazados en DC , de modo que BS es paralela a AD y AT es paralela a BC , prueba que $DT = SC$ y que las áreas de los triángulos $\triangle ADT$ y $\triangle BSC$ son iguales.



Solución 1:

$ABCT$ y $ABSD$ son paralelogramos por hipótesis,

por lo tanto $AB=TC$ y $AB=DS$ por ser lados opuestos de un paralelogramo

Así que $DS=TC$

Luego $DS+ST=ST+TC$ sumando ST a ambos miembros

Sean h_A y h_B las alturas por A y B respectivamente, a los triángulos $\triangle ADT$ y $\triangle BSC$

$h_A = h_B$ ya que son perpendiculares entre las mismas paralelas AB y DC .

Por lo tanto $\triangle ADT$ y $\triangle BSC$ tienen áreas iguales por tener misma un par de bases y alturas respectivas iguales.



XXIV Olimpiada Estatal de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas
“Francisco García Salinas”
Unidad Académica de Matemáticas



Solución 2.

ABCT y ABSD son paralelogramos por hipótesis,

por lo tanto $AB=TC$ y $AB=DS$ por ser lados opuestos de un paralelogramo

Así que $DS=TC$

$\angle TDA = \angle CSB$ por ser correspondientes

$\angle DAT = \angle SBC$ Por ser ángulos de lados paralelos

$\triangle ADT \cong \triangle BSC$ por ALA.

Así que estos triángulos tienen áreas iguales.

Problema 3. Se tienen dos pistas de carreras cuadradas, una cuyos lados miden 150 metros y la otra cuyos lados miden 100 metros. Se quiere correr algunas vueltas completas en la primera pista y algunas vueltas completas en la segunda para recorrer un total de 5.4 kilómetros. ¿Cuál es el máximo número de vueltas completas que se pueden dar si se quiere cumplir estas condiciones?

Solución. Digamos que se dan a vueltas a la primera pista y b vueltas a la segunda. Como las pistas miden 600 y 400 metros, respectivamente, queremos encontrar el máximo de $a + b$ tal que $600a + 400b = 5400$, dividiendo ambos lados de la ecuación entre 200, tenemos que la ecuación anterior es equivalente a $a + 2(b) = 27$. De aquí deducimos que para maximizar $a + b$ hay que minimizar a . Como a no puede ser cero, ya que 27 no es par, podemos suponer que a es 1 entonces b es 12 y en este caso el número de vueltas es 13. Si a es 3 entonces b es 9 y el total de vueltas sería 12 que es menor que 13. Cualquier otro valor de a hace que el número de vueltas sea menor que 13. Luego, el máximo es 13.

Problema 4. Se llena una tabla compuesta por p filas y q columnas con los números naturales desde el 1 hasta el pq . Los números se escriben en orden ascendente de izquierda a derecha a lo largo de la primera fila, luego, en orden ascendente a lo largo de la segunda fila y así sucesivamente. El número 20 se encuentra en la tercera fila, el número 41 en la quinta fila y el número 103 en la última fila. Encuentra $p + q$.

Solución.

En la tercera fila aparecen los números del $2q + 1$ al $3q$, por lo que $2q + 1 \leq 20 \leq 3q$, de donde $7 \leq q \leq 9$. En la quinta fila aparecen los números del $4q + 1$ al $5q$, por lo que $4q + 1 \leq 41 \leq 5q$, de donde $9 \leq q$, por lo que $q = 9$. Luego, en la doceava fila aparecen los números del 100 al 108, por lo que ésta debe ser la última fila y $p = 12$. Por lo tanto, $p + q = 21$.



XXIV Olimpiada Estatal de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas
“Francisco García Salinas”
Unidad Académica de Matemáticas



Problema 5. Encuentra todos los conjuntos de cuatro números naturales a, b, c, d en orden estrictamente creciente, es decir $a < b < c < d$, los cuales cumplen que $2^a - 2^b - 2^c + 2^d = 2010$.

Solución.

Tenemos que, como a, b, c y d , podemos hacer la siguiente factorización:

$$2^a(1 - 2^{b-a} - 2^{c-a} + 2^{d-a}) = 2010$$

Aquí hemos separado en un factor par y uno impar, de donde comparando ambos miembros podemos deducir que $2^a = 2$, de donde $a = 1$.

Entonces

$$1 - 2^{b-1} - 2^{c-1} + 2^{d-1} = 1005$$

$$2^{d-1} - 2^{b-1} - 2^{c-1} = 1004$$

Podemos usar el mismo argumento que antes y escribir

$$2^{d-1}(1 - 2^{b-d} - 2^{c-d} + 1) = 1004$$

Así tenemos que $2^{d-1} = 4$, $2^{b-1} = 22$

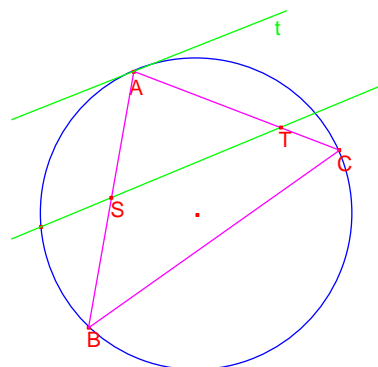
Como las bases son iguales podemos escribir que $b-1 = 2$, de donde $b = 3$.

$$\text{Ahora: } 2^{d-1} - 2^{c-1} = 251, \quad 2^{d-1} - 2^{c-1} = 252, \quad 2^{d-1}(1 - 2^{c-d}) = 4(63)$$

$$\text{Entonces } 2^{d-1} = 22, \quad c-1 = 2, \quad c = 5, \text{ Luego } 2^{d-1} - 1 = 63, \quad 2^{d-1} = 64, \quad 2^{d-1} = 26$$

$$\text{Entonces } d-1 = 6 \text{ y finalmente } d = 11$$

Problema 6. Sea t tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo $\triangle ABC$ en A y ST es paralela a t con $S \in AB$ y $T \in AC$. Prueba que $\angle ACB$ y $\angle BST$ son suplementarios.





XXIV Olimpiada Estatal de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas
“Francisco García Salinas”
Unidad Académica de Matemáticas



Solución.

Por teorema del ángulo inscrito $\angle ACB = \frac{AB}{2}$

Por teorema del ángulo semi inscrito $\angle XAS + B = \frac{AB}{2}$

Por ser alternos internos $\angle XAS = \angle TSA$

Por lo tanto $\angle ACB = \angle TSA \dots(1)$

Como $\angle BST + \angle TSA = 180^\circ \dots(2)$ por ser ángulos de lados colineales y

Entonces $\angle BST + \angle ACB = 180^\circ$ y esto significa que son suplementarios.